Εισαγωγή στην τοπολογία | 4-3-20. 3ο Μάθημα

Τρίτη: 12-2
Πέμπτη: 15-18

Ακολουθίες στον ευκλείδειο χώρο $(\mathbb{R}^k, \rho_2)$

Αν $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στον $\mathbb{R}^k$. Για κάθε $\vec{x}_n=(x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^k)$, έτσι σε κάθε ακολουθία $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στον $\mathbb{R}^k$ αντιστοιχούν και ακολουθίες πραγματικών αριθμών οι $(x_n^1)_{n\in\mathbb{N}}, (x_n^2)_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$.

Πρόταση: Έστω $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στον $(\mathbb{R}^k, \rho_2)$ και $\vec{x}_0\in\mathbb{R}^k$, $\vec{x}_0=(x_0^1, \dots, x_0^k)$, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

i) $\vec{x}_n \xrightarrow{\rho_2} \vec{x}_0$

ii) $\forall i\in\{1,\dots,k\}: x_n^i \longrightarrow x_0^i$

Απόδειξη: i) => ii) Υποθ. $\vec{x}_n \xrightarrow{\rho_2} \vec{x}_0$

Έστω $i_0\in\{1,\dots,k\}$, θ.δ.ο. $x_n^{i_0} \longrightarrow x_0^{i_0}$.

Έστω $\varepsilon>0$, εφόσον $\vec{x}_n \xrightarrow{\rho_2} \vec{x}_0$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\rho_2(\vec{x}_n, \vec{x}_0)<\varepsilon$ $\forall n\geq n_0$. Όμως $|x_n^{i_0}-x_0^{i_0}|\leq\left(\sum_{i=1}^{k}|x_n^i-x_0^i|^2\right)^{1/2}=$

$=\rho_2(\vec{x}_n, \vec{x}_0)$

Άρα $\forall n\geq n_0$ $|x_n^{i_0}-x_0^{i_0}|<\varepsilon$, συνεπώς $x_n^{i_0}\longrightarrow x_0^{i_0}$

ii) => i) Υποθέτουμε ότι $x_n^i \longrightarrow x_0^i$ $\forall i\in\{1,\dots,k\}$

Έστω $\varepsilon>0$. $\forall i\in\{1,\dots,k\}$ εφόσον $x_n^i\longrightarrow x_0^i$ υπάρχει $n_i\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n\geq n_i$ να ισχύει $|x_n^i-x_0^i|<\varepsilon/\sqrt{k}$

Θέτουμε $n_0=\max\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$, τότε $\forall n\geq n_0$

$\rho_2(\vec{x}_n, \vec{x}_0)=\left(\sum_{i=1}^{k}|x_n^i-x_0^i|^2\right)^{1/2}<\left(\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{k}}\right)^2\right)^{1/2}=\varepsilon \Rightarrow \underline{\vec{x}_n \xrightarrow{\rho_2} \vec{x}_0}$

Θεώρημα (Bolzano - Weierstrass στον $\mathbb{R}^k$): Κάθε φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^k$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Απόδειξη: Για $k=1$ είναι γνωστό.

Το δείχνουμε για $k=2$: Έστω $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^2$, $\vec{x}_n=(x_n^1, x_n^2)$

Για κάθε n: $\|x_n^1\| \leq \|x_n^2\|_2$ και εφόσον η $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{R}^k$.

Η $(x_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη ακολουθία πραγματικών, άρα υπάρχει $(x_{k_n}^1)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουσα υπακολουθία της.

Τώρα η $(x_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη άρα και η $(x_{k_n}^2)$ είναι επίσης φραγμένη. Άρα από θεώρημα B-W στον $\mathbb{R}$ έχει μια συγκλίνουσα υπακολουθία $(x_{k_{\lambda_n}}^2)_{n\in\mathbb{N}}$. Η $(x_{k_{\lambda_n}}^1)_{n\in\mathbb{N}}$ θα είναι συγκλίνουσα ως υπακολουθία της συγκλίνουσας ακολουθίας $(x_{k_n}^1)_{n\in\mathbb{N}}$. Εφόσον οι $(x_{k_{\lambda_n}}^1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_{k_{\lambda_n}}^2)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι συγκλίνουσες ακολουθίες στον $\mathbb{R}$, η $(\vec{x}_{k_{\lambda_n}})$ θα είναι συγκλίνουσα σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση.

Γενική περίπτωση: Θα υιοθετήσουμε έναν εναλλακτικό συμβολισμό για τις υπακολουθίες.

Αν $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία σε ένα σύνολο Y και $(y_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ μια υπακολουθία της. Θέτοντας $M=\{k_1, k_2, k_3, \dots\}$ θα συμβολίζουμε την $(y_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ με $(y_n)_{n\in M}$.

Έστω $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}^k$, $\vec{x}_n=(x_n^1,\dots,x_n^k)$. $\forall i\in\{1,\dots,k\}$, $|x_n^i|\leq\|\vec{x}_n\|_2$ άρα η $(x_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Εφόσον η $(x_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη ακολ. στο $\mathbb{R}$, $\exists$ M_1 άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ ώστε $(x_n^1)_{n\in M_1}$ να είναι συγκλίνουσα. Όμοια αφού $(x_n^1)_{n\in M_1}$ είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$, θα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, άρα υπάρχει $M_2\subset M_1\subset\mathbb{N}$, M_2 άπειρο ώστε η $(x_n^2)_{n\in M_2}$ να είναι συγκλίνουσα. Η $(x_n^3)_{n\in M_2}$ είναι φραγμένη, άρα $\exists$ $M_3\subset M_2\subset M_1\subset\mathbb{N}$ άπειρο ώστε η $(x_n^3)_{n\in M_3}$ να είναι συγκλίνουσα. Μετά από k-βήματα θα έχουμε επιλέξει $M_k\subset M_{k-1}\subset\dots\subset M_3\subset M_2\subset M_1\subset\mathbb{N}$, με M_k άπειρο, ώστε $\forall i=1,\dots,k$ η $(x_n^i)_{i\in M_i}$ να είναι συγκλίνουσα ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Θέτουμε $M=M_k$, άρα $\forall i\in\{1,\dots,k\}$ η $(x_n^i)_{n\in M}$ είναι υπακολουθία της συγκλίνουσας ακολουθίας $(x_n^i)_{i\in M_i}$. Από προηγούμενη πρόταση, η $(\vec{x}_n)_{n\in M}$ θα είναι συγκλίνουσα υπακολουθία της $(\vec{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Συνέχεια Συναρτήσεων.

Ορισμός: Έστω (X,ρ), (Y,ρ) δύο μετρικοί χώροι, και $f:X\to Y$ μια συνάρτηση και $x_0\in X$. Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 αν $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ ώστε $\forall x\in X$, αν $\rho(x,x_0)<\delta$, τότε $d(f(x),f(x_0))<\varepsilon$. Η f λέγεται συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε $x_0\in X$.

Παρατήρηση: Το δ εξαρτάται από τα x_0,ε.

Παραδείγματα: α) $f:(X,\rho)\to(Y,\rho)$ και $y_0\in Y$

$f(x)=y_0$ $\forall x\in X$ (σταθερή συνάρτηση)

είναι συνεχής.

β) $f:(X,\rho)\to(Y,\rho)$ με $f(x)=x$, $\forall x\in X$.

(έστω $\varepsilon>0$, ορίζω $\delta=\varepsilon\ldots$)

γ) Έστω (X,ρ) ο διακριτός μετρικός χώρος και (Y,d) ένας τυχαίος μετρικός χώρος, τότε κάθε συνάρτηση $f:(X,\rho)\to(Y,\rho)$ είναι συνεχής.

Απόδειξη: Έστω $x_0\in X$ και $\varepsilon>0$. Θέτω $\delta=1$.

Τότε $\forall x\in X$, αν $\rho(x,x_0)<1$ τότε $x=x_0$

άρα $d(f(x),f(x_0))=d(f(x_0),f(x_0))=0<\varepsilon$.

δ) Κάθε ακολουθία $f:\mathbb{N}\to(X,\rho)$ είναι συνεχής.

Άρνηση του ορισμού της συνέχειας: Η f δεν είναι συνεχής στο x_0 $\Leftrightarrow$ $(\exists\varepsilon>0),(\forall\delta>0),(\exists x\in X)$ με $\rho(x,x_0)<\delta$ και $d(f(x),f(x_0))\geq\varepsilon$.

Θεώρημα: (Αρχή μεταφοράς συγκλινουσών ακολουθιών)

Έστω (X,ρ), (Y,d) δύο μετρικοί χώροι με $f:(X,\rho)\to(Y,d)$ και $x_0\in X$

Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

i) Η f είναι συνεχής στο x_0.

ii) Για κάθε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X αν $x_n\xrightarrow{\rho}x_0$ τότε $f(x_n)\xrightarrow{\rho}f(x_0)$.

Απόδειξη: (i) => (ii) Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Έστω $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο X με $x_n \xrightarrow{p} x_0$.

Θ.δ.ο. $f(x_n) \xrightarrow{d} f(x_0)$. Έστω $\varepsilon>0$, εφόσον η f είναι συνεχής στο x_0 υπάρχει $\delta>0$ ώστε για κάθε $x\in X$ αν $(p(x,x_0)<\delta$ τότε $d(f(x),f(x_0))<\varepsilon.)$ (1)

Εφόσον $x_n \xrightarrow{p} x_0$ υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n\geq n_0$ να ισχύει $p(x_n,x_0)<\delta$, έτσι για κάθε $n\geq n_0$, λόγω της (1) θα έχουμε $d(f(x_0),f(x_0))<\varepsilon$,

επομένως $f(x_n) \xrightarrow{d} f(x_0)$.

(ii) => (i) Με απαγωγή σε άτοπο. Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι η f δεν είναι συνεχής στο x_0. {Τότε $\exists\ \varepsilon>0$ ώστε: $(\forall\delta>0)$, $(\exists x\in X)$ με $p(x,x_0)<\delta$ και $d(f(x),f(x_0))\geq\varepsilon$.} (2)

Εφαρμόζοντας την (2) για $\delta=1/n$, $n\in\mathbb{N}$ υπάρχει $x_n\in X$ ώστε $p(x,x_0)<\frac{1}{n}$ και $d(f(x_n),f(x_0))\geq\varepsilon$.

Έχουμε έτσι κατασκευάσει μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο X.

$$\underset{\substack{\downarrow\\0}}{0}\leq p(x,x_0)\leq \underset{\substack{\downarrow\\0}}{\frac{1}{n}} \Rightarrow p(x_n,x_0)\to 0,\ \text{άρα } x_n \xrightarrow{p} x_0$$

Από την υπόθεση μας προκύπτει $f(x_n) \xrightarrow{d} f(x_0)$, το οποίο είναι άτοπο εφόσον $d(f(x_n),f(x_0))\geq\varepsilon>0$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Επομένως η f δεν είναι συνεχής στο x_0.